

Rezime

Ovaj završni magistarski rad se sastoji od četiri poglavlja koja su koncipirana na sljedeći način:

U prvom poglavlju naveli smo osnovne pojmove i poznate rezultate koji su neophodni za dalju analizu lokalne i globalne dinamike odabranih racionalnih diferentnih jednadžbi kod kojih je uočen zajednički fenomen Naimark-Sackerova bifurkacija. Specifikum ovog fenomena je da jedinstven pozitivan ekvilibrijum gubi stabilnost, preko nehiperboličke tačke do repelera, te da se pojavljuju periodička rješenja bilo kojeg perioda, što u konačnici rezultira pojavom haosa. Za vizualizaciju bifurkacionih dijagrama, faznih portreta, putanja, te stabilnosti u drugom, trećem i četvrtom poglavlju korišteni su softverski paketi *Mathematica 12.1* i *Dynamica 4*.

U drugom poglavlju ispitivali smo dinamiku diferentne jednadžbe drugog reda s kvadratnim članovima oblika

$$x_{n+1} = \frac{F}{bx_n x_{n-1} + cx_{n-1}^2 + f}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

sa nenegativnim parametrima i nenegativnim početnim uvjetima x_{-1}, x_0 za koje je $bx_0 x_{-1} + cx_{-1}^2 + f > 0$. Data je analiza lokalne stabilnosti jedinstvene tačke ekvilibrijuma, te koristeći pridruženo preslikavanje, određena je oblast parametarskog prostora u kojima je jedinstvena tačka ekvilibrijuma globalno asimptotski stabilna. Pokazano je da matrica Jakobijana pridruženog preslikavanja ima konjugirano-kompleksne svojstvene vrijednosti po modulu jednake jedinici što je jedan od uvjeta za egzistenciju već pomenute bifurkacije.

Treće poglavlje posvećeno je ispitivanju dinamike racionalne diferentne jednadžbe drugog reda s kvadratnim članovima oblika

$$x_{n+1} = \frac{Bx_n x_{n-1} + F}{bx_n x_{n-1} + c_{n-1}^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje su svi parametri i početni uvjeti nenegativni realni brojevi. Preslikavanje pridruženo ovoj jednadžbi, za razliku od jednadžbe iz prethodnog poglavlja, mijenja monotonost u ovisnosti o prvoj varijabli, dok je uvijek opadajuće po drugoj varijabli za dati parametarski prostor. Ova činjenica je umnogome iskomplikovala ispitivanje stabilnosti jednadžbe i dala vrlo interesantne rezultate koji su publikovani u časopisu indeksiranom u najjačim matematičkim bazama. U određenim slučajevima, pokazano je da lokalna asimptotska stabilnost jedinstvene tačke ekvilibrijuma povlači globalnu asimptotsku stabilnost. Za dokazivanje globalnih rezultata korišteni su tzv. "mM" teoremi, odnosno analiza poluciklusa.

Također, pokazali smo da posmatrana jednađba ispoljava Naimark-Sackerovu bifurkaciju koja rezultira pojavljivanjem lokalno stabilnog periodičkog rješenja nepoznatog perioda.

Lokalne i globalne karakteristike jedinstvene tačke ekvilibrijuma, kao i ograničenost rješenja homogene frakcionalne diferentne jednađbe sa kvadratnim članovima oblika

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}^2 + bx_n x_{n-1} + cx_n^2}{Ax_{n-1}^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

koju smo smjenom oblika $x_n = \frac{1}{u_n}$ preveli u jednađbu

$$u_{n+1} = \frac{Au_n^2}{au_n^2 + bu_n u_{n-1} + cu_{n-1}^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ispitivane su u četvrtom poglavlju. Pridruženo preslikavanje u ovom slučaju ima karakter monotonosti da po prvoj varijabli raste, a po drugoj opada i do sada nema općenitih rezultata primjenjivih na ovu varijantu. Pomoću takozvanog "embedding metoda" je pokazana ograničenost rješenja, a onda nađen invarijantni interval neophodan za globalne zaključke. Osim toga, razmatrana je i Naimark-Sackerova bifurkacija po drugačijem algoritmu u odnosu na prethodna dva poglavlja. Njegova prednost je mogućnost određivanja asimptotske aproksimacije invarijantne krive koja se spominje u Naimark-Sackerovom bifurkacionom teoremu, odnosno pojavljuje na vizualizacijama. Izračunati su i Lyapunovi koeficijenti kao dodatna potvrda pojavljivanja haosa te je i u tom slučaju data vizualna podrška.