

## SYLLABUS

**1. Puni naziv nastavnog predmeta:**

Mjera i integral

**2. Skraćeni naziv nastavnog predmeta / šifra:**

M&amp;I

**3. Ciklus studija:**

1

**4. Bodovna vrijednost ECTS:**

6

**5. Status nastavnog predmeta:** Obavezni  Izborni**6. Preduslovi za polaganje nastavnog predmeta:**

Analiza I, II, III i IV, Teorija skupova

**7. Ograničenja pristupa:**

-

**8. Trajanje / semestar:**

1

7

**9. Sedmični broj kontakt sati:**

9.1. Predavanja:

3

9.2. Auditorne vježbe:

2

9.3. Laboratorijske / praktične vježbe:

0

**10. Fakultet:**

Prirodno-matematički fakultet

**11. Odsjek / Studijski program:**

Matematika / Primijenjena matematika i Edukacija u matematici

**12. Odgovorni nastavnik:**

Vedad Pašić

**13. E-mail nastavnika:**

vedad.pasic@untz.ba

**14. Web stranica:**

<http://www.vedad.frontslobode.org/mjera/>

**15. Ciljevi nastavnog predmeta:**

Osnovni cilj ovog predmeta je da student spozna da nakon stečenih znanja iz teorije mjere, kompletna znanja stečena u matematičkoj analizi dobijaju svoju opštost. Klase funkcija poznate iz ranijih modula matematičke analize dobijaju još jednu – klasu mjerljivih funkcija. Značajno će se moći poopštiti i pitanja integracije. Integracija u smislu Lebesguea je najbolje objašnjena od strane samog Lebesguea: "Moram platiti određenu sumu, koju sam skupio u svom džepu. Uzimam novčanice i novčiće iz džepa i dajem ih kreditoru redom kojim ih nalazim dok ne dodem do ukupne sume. Ovo je Riemannov integral. Ali mogu ovom problemu pristupiti i drukčije: nakon što sam izvadio sav novac iz džepa, grupišem novčanice i novčiće prema identičnim vrijednostima i onda platim kreditoru u različitim apoenima. Ovo je moj integral." Pokazat će se da dužina, površina i zapremina imaju veoma korisna poopćenja na amorfnе skupove. Uvest će se i koncept Hilbertovih prostora, kao najjednostavnije beskonačno dimenzionalne generalizacije Euklidovih prostora.

**16. Ishodi učenja:**

Na kraju semestra uspješni studenti, koji su tokom čitavog nastavnog perioda kontinuirano obavljali svoje obaveze, će postići potreban nivo kompetentnosti u poznavanju i primjenama iz mjere skupa, a posebno mjerljivosti funkcije. S tim u vezi veoma važna pitanja konvergencije nizova takvih funkcija su važni zadaci ovoga predmeta. Mjera i njena neprekidnost, te diskretna mjera posebno se ističu kroz zadatke u primjenama. Mjera na algebri podskupova realnih brojeva elegantno se poopćava na proizvoljne skupove. Ovaj predmet je priprema za opciju integraciju od Riemannovog koncepta integracije. Znanja iz mjere će imati važnost u izučavanjima Vjerovatnoće. Student će spoznati istinsku snagu integracije, te onda pristupiti izučavanju  $L^2$  prostora kvadratno integrabilnih funkcija, sa fokusom na kreiranje metrike, mjere i norme. Razne vrste konvergencije će konačno biti objedinjene.

**17. Indikativni sadržaj nastavnog predmeta:**

Elementi teorije skupova. Relacije. Preslikavanja. Kardinalni broj skupa. Prošireni skup realnih brojeva. Kompaktni skupovi u  $\mathbb{R}$ . Neprekidna preslikavanja na  $\mathbb{R}$ . Mjera skupa. Spoljašnja i unutrašnja mjera skupa. Mjerljivi i nemjerljivi skupovi po Caratheodory-ju i Lebesgueu. Mjerljive funkcije. Konvergencija skoro svuda. Konvergencija po mjeri. Teorem Jegorova. Lebesgue-ova mjera skupa. Mjerljivi prostori. Mjera sa znakom. Riemannov integral. Lebesgueov integral ograničene funkcija ne skupu konačne mjere. Lebesgueov integral neneaktivne funkcije. Opšti Lebesgueov integral. Veza između Riemannovog i Lebesgueovog integrala. Veza između nesvojstvenog i Lebesgueovog integrala. Konvergencija po mjeri. Diferenciranje. Diferenciranje monotonih funkcija. Lebesgueova teorema. Funkcije ograničene varijacije. Diferencijarnje integrala. Apsolutno neprekidne funkcije. Stieltjesov integral. Kvadratno integrabilne funkcije.  $L^2$  prostor. Uvod u metričke prostore. Uvod u normirane prostore. Euklidovi prostori i njihova generalizacija. Jaka konvergencija.  $L^2$  prostori sa prebrojivom bazom.

**18. Metode učenja:**

Predavanja i auditorne vježbe.

Studenti imaju obavezu prisustvovanja svim satima predavanja i vježbi.

Uvjet za dobijanje potpisa je minimalno 70% prisustvo svim oblicima nastave.

**19. Objašnjenje o provjeri znanja:**

Predispitne obaveze sastoje se od dva testa tokom semestra koji nose po 20% ukupne vrijednosti ocjene, te od sedmičnih zadataka koje se predaju, ispravljaju i diskutuju na auditornim vježbama, te nose ukupno 15% ocjene.

Testovi se rade u pismenom obliku i sadržavaju zadatke iz oblasti koje su pokrivena na predavnicima i vježbama do tada.

Prvi test se radi sredinom, a drugi test na kraju semestra.

Finalni ispit: Finalni ispit provjerava cjelokupno znanje iz svih oblasti pokrivenih na predmetu i nosi 45% ukupne ocjene. Provjera znanja na finalnom ispitu je pismenog oblika.

Uslov za polaganje predmeta da se na finalnom ispitu ostvari minimalno 23 boda od mogućih 45, s tim da student mora imati skupa sa predispitnim obavezama preko 54 boda za prolaznu ocjenu (6).

**20. Težinski faktor provjere:**

Predispitne obaveze : Prvi test 20%; Drugi test 20%; Zadaće i aktivnost: 15%.

Finalni ispit: 45%.

Student mora ostvariti minimalno 23 boda na finalnom ispitu, te ukupno 54 boda kako bi se ostvarila prolazna ocjena šest (6).

Ocjena šest (6) 54-63

Ocjena sedam (7) 64-73

Ocjena osam (8) 74-83

Ocjena devet (9) 84-93

Ocjena deset (10) 94-100

**21. Osnovna literatura:**

1. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin : Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Space. New York and London Academic Press (1961).
2. A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin : Introductory Real Analysis. Dover Books on Mathematics (1975).
3. D. Jukić : Mjera i integral, Univerzitet Osijek (2012).
4. F. Dedegić : Mjera i integral, Univerzitet u Tuzli 2005 (skripta).

**22. Internet web reference:**

<http://www.vedad.frontslobode.org/mjera/>  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Measure\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Measure_(mathematics))  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue\\_integration](https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_integration)

**23. U primjeni od akademske godine:**

2016/17

**24. Usvojen na sjednici NNV/UNV:**

16.03.2016